Applications linéaires

1. Vérifier qu'un ensemble a une propriété $\mathscr{P}$

On dit qu'un ensemble E a pour propriété $\mathscr{P}$ s'il vérifie les deux conditions suivantes :

(1) Si pour tout $u \in E$ et pour tout $v \in E$ on a $u + v \in E$.

(2) Si pour tout $u \in E$ et pour tout $k \in \mathbb{R}$ on a $ku \in E$.

Ex 1 Démontrer que les ensembles suivants vérifient la propriété $\mathscr{P}$.

1. $\mathbb{C}$: Ensemble des nombres complexes.

2. $\mathscr{E}$: Ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme $f(x) = \alpha \mathrm{e}^x$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

3. $\mathscr{D}$: Ensemble des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

4. $\mathscr{S}$: Ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ solutions de l'équation différentielle $2y' + 3y = 0$.

2. Applications linéaires

Soit une application $f : E \longrightarrow F$ avec E vérifiant la propriété $\mathscr{P}$.

On dit que f est linéaire si elle vérifie les deux conditions suivantes :

(1) Si pour tout $u \in E$ et pour tout $v \in E$ on a $f(u + v) = f(u) + f(v)$.

(2) Si pour tout $u \in E$ et pour tout $k \in \mathbb{R}$ on a $f(ku) = kf(u)$.

Ex 2

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \bar{z} \end{aligned}$$

Démontrer que f est linéaire.

Ex 3

On note :

$\mathscr{D}$ l'ensemble des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

$\mathscr{F}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On considère l'application suivante :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathscr{D} &\longmapsto \mathscr{F} \\ f &\longmapsto f' \end{aligned}$$

Démontrer que φ est linéaire.

Ex 4

On note :

$\mathscr{D}$ l'ensemble des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

$\mathscr{F}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On considère l'application suivante :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathscr{D} &\longmapsto \mathscr{F} \\ f &\longmapsto 4f' - f \end{aligned}$$

Démontrer que φ est linéaire.

Ex 5

On note $\mathscr{C}$, l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On considère l'application suivante :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathscr{C} &\longmapsto \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Démontrer que φ est linéaire.

3. Exemples dans $\mathbb{R}^2$

On note $\mathbb{R}^2$ l'ensemble des couples (x, y) avec x et y réels.

On admet que $\mathbb{R}^2$ vérifie la propriété $\mathscr{P}$ et que dans $\mathbb{R}^2$ on a les opérations suivantes :

- Pour $u = (x\ ,\ y) \in \mathbb{R}^2$ et $v = (x'\ ,\ y') \in \mathbb{R}^2$, on a $u + v = (x + x'\ ,\ y + y')$.
- Pour $u = (x\ ,\ y) \in \mathbb{R}^2$ et pour $k \in \mathbb{R}$, on a $ku = (kx\ ,\ ky)$.

Ex 6

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par :

$f(x) = (3x\ ,\ -x)$

Démontrer que f est linéaire.

Ex 7

On considère l'application suivante :

$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par :

$$f(x\ ,\ y) = (2x\ ,\ x + y)$$

1. Calculer $f(1\ ,\ 3)$.

2. Calculer l'antécédent de $(8\ ,\ -2)$.

3. Démontrer que f est linéaire.