Ex1 $E = \{P, F\}$ $\quad Card(E) = 2$

Une liste ordonnée des 10 résultats est un 10-uplets de E donc un élément de $E \times E \times \dots \times E$ ou E^{10}.

$Card(E^{10}) = (Card(E))^{10} = 2^{10}$.

Il y a donc 2^{10} listes de résultats possibles

Nombre de listes sans pile : 1 seule $(F, F, \dots F)$

donc le nombre de listes avec au moins 1 pile est $2^{10} - 1$ soit 1023

Réponse : 1023 listes ordonnées ont au moins un pile

Ex2 E : Ensemble des cases $\quad Card(E) = 25$

1) le nombre de figures possibles est égale au nombre de façon de choisir 3 cases parmi 25

il y en a donc $\binom{25}{3}$ soit 2300 figures possibles

2) Si la case A_1 est occupée, il reste donc à choisir 2 cases parmi 24 soit $\binom{24}{2}$ soit 276 possibilités

3) Supposons les jetons sur la 1ère ligne. (5 cases)

il y a donc $\binom{5}{3}$ possibilités soit 10 possibilités.

Il y a 5 lignes possibles donc

5×10 possibilités

soit 50 possibilités avec les jetons sur une même ligne

Ex3 5 questions, 4 réponses proposées, 1 seule réponse exacte

1) Une réponse au questionnaire est un élément de

$Q_1 \times Q_2 \times Q_3 \times Q_4 \times Q_5$

avec pour $i \in [\![1, 5]\!]$ Q_i l'ensemble des réponses possibles à la question numéro i

$Card(Q_i) = 4$

donc il y a 4^5 réponses possibles

soit 1024 réponses possibles.

2) a) Si on répond juste aux 2 premières questions, il reste à répondre à 3 questions, le nombre de possibilités est donc

$1 \times 1 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^3 = 64$

donc 64 possibilités en répondant juste aux 2 premières questions

b) Si on répond juste aux 2 premières questions seulement alors on répond faux aux 3 questions suivantes donc il y a 3 possibilités pour ces 3 questions donc

$1 \times 1 \times 3 \times 3 \times 3$ possibilités

soit 27 possibilités.

c) On répond juste à 2 questions exactement

D'après b) si on répond juste aux 2 premières questions il y a 27 possibilités.

Or il y a $\binom{5}{2}$ façons de choisir les 2 questions auxquelles on répond juste

Donc il y a $\binom{5}{2} \times 27$ possibilités.

soit 270 possibilités avec 2 réponses justes exactement.

Ex4

1) Un choix revient à choisir 6 questions parmi 10.

donc $\binom{10}{6}$ choix possibles de répondre

soit 210 façons différentes de répondre au questionnaire

2) Si il est sûr de ne pas savoir répondre aux deux premières questions alors il doit choisir les 6 questions parmi les 8 suivantes soit $\binom{10}{8}$ choix possibles

soit 45 façons possibles

Ex5 5 femmes, 7 Hommes. Total : 12 personnes

1) Un groupe de 4 personnes revient à choisir 4 personnes parmi 12 donc $\binom{12}{4}$ groupes possibles soit 495 groupes différents.

2) Groupe mixte donc 2 femmes et 2 hommes.

$\binom{5}{2}\times\binom{7}{2}$ possibilités soit 210 groupes mixtes.

3) Pour calculer le nombre de groupes avec au moins une femme, on commence par calculer le nombre de groupes sans femme soit $\binom{7}{4}$ groupes sans femmes.

Le nombre de groupes avec au moins une femme est donc $\binom{12}{4}-\binom{7}{4}$

soit 460 groupes avec au moins une femme.

4) Pour former un groupe avec Fanny et Théo, il reste à choisir 2 personnes parmi 10

donc $\binom{10}{2}$ groupes différents soit 45 groupes avec Fanny et Théo

5) Nombre de groupes avec Fanny ou Théo ?

On note F l'ensemble des groupes avec Fanny

T l'ensemble des groupes avec Théo

On veut calculer Card $(F\cup T)$

on sait que Card $(F\cup T)$ = Card (F) + Card (T) - Card $(F\cap T)$

On a Card $(F\cap T) = 45$ (d'après question 4)

On a Card (F) = Card (T) = $\binom{11}{3} = 165$

donc Card $(F\cup T) = 165+165-45$

$= 285$

donc il y a 285 groupes avec Fanny ou Théo (Fanny avec Théo étant considéré possible)

Ex6 Soit E l'ensemble des chiffres et lettres Card $(E) = 36$

Un code est un 8-uplet de E donc le nombre de codes possibles est Card $(E^8) = 36^8$

Le logiciel teste environ 100×10^6 codes par seconde

$\frac{36^8}{100\times10^6} \simeq 28211{,}1$ donc il faut 28212 secondes pour tester tous les codes soit presque 8 heures. (28212 divisé par 3600)