Exercice 1 Une urne contient 100 petits cubes en bois dont 60 sont bleus et les autres rouges.

Parmi les cubes bleus, 40 % ont leurs faces marquées d'un cercle, 20 % ont leurs faces marquées d'un losange et les autres ont leurs faces marquées d'une étoile.

Parmi les cubes rouges, 20 % ont leurs faces marquées d'un cercle, x % ont leurs faces marquées d'un losange et les autres ont leurs faces marquées d'une étoile.

Partie A : expérience 1 On tire au hasard simultanément 3 cubes de l'urne. Les résultats seront arrondis au millième.

1. Quelle est la probabilité de tirer au moins un cube rouge ?

2. Quelle est la probabilité que les cubes tirés soient de la même couleur ?

3. Quelle est la probabilité de tirer exactement un cube marqué d'un cercle ?

Partie B : expérience 2 On désigne par x un réel appartenant à l'intervalle [0 ; 80]. On tire au hasard un cube de l'urne.

1. Démontrer que la probabilité que soit tiré un cube marqué d'un losange est égale à $0,12+0,004x$.

2. Déterminer x pour que la probabilité de tirer un cube marqué d'un losange soit égale à celle de tirer un cube marqué d'une étoile.

3. Déterminer x pour que les évènements « tirer un cube bleu » et « tirer un cube marqué d'un losange » soient indépendants.

4. On suppose dans cette question que $x = 50$.

Calculer la probabilité que soit tiré un cube bleu sachant qu'il est marqué d'un losange.

Exercice 2 Pour tout entier naturel n, on considère les intégrales suivantes : $I_n = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\sin(x)\,\mathrm{d}x$, $\quad J_n = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\cos(x)\,\mathrm{d}x$.

1. Calculer I_0.

2. **a.** Justifier que, pour tout entier naturel n , on a $I_n \geqslant 0$.

b. Montrer que, pour tout entier naturel n , on a $I_{n+1} - I_n \leqslant 0$.

c. Déduire des deux questions précédentes que la suite (I_n) converge.

3. **a.** Montrer que, pour tout entier naturel n , on a : $I_n \leqslant \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x$.

b. Montrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1-\mathrm{e}^{-n\pi}}{n}$.

c. Déduire des deux questions précédentes la limite de la suite (I_n).

4. **a.** En intégrant par parties l'intégrale I_n de deux façons différentes, établir les deux relations suivantes, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

$$I_n = 1 + \mathrm{e}^{-n\pi} - nJ_n \quad \text{et} \quad I_n = \frac{1}{n}J_n$$

b. En déduire que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a $I_n = \dfrac{1+\mathrm{e}^{-n\pi}}{n^2+1}$

5. On souhaite obtenir le rang n à partir duquel la suite (I_n) devient inférieure à 0,1. Compléter la cinquième ligne du script Python ci-contre avec la commande appropriée.

```
1 from math import *
2 def seuil() :
3   n = 0
4   I = 2
5   ...
6       n=n+1
7       I=(1+exp(-n*pi))/(n*n+1)
8 return n
```